

# 3

## CAPÍTULO

# **MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE MÚLTIPLOS CONTÊINERES COM RESTRIÇÕES DE CARREGAMENTO COMPLETO DE GRUPO DE ITENS E DE ESTABILIDADE VERTICAL**

*Cleder Marcos Schenekemberg*

Universidade Federal do Paraná,  
Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia.  
cledercms@hotmail.com

*Cassius Tadeu Scarpin*

Universidade Federal do Paraná,  
Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia.  
cassiusts@ufpr.br

*Deidson Vitorio Kurpel*

Universidade Federal do Paraná,  
Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia.  
kurpeld@gmail.com

## RESUMO

Este trabalho trata de um caso particular dos problemas de corte e empacotamento, conhecidos como Problemas de Carregamento de Contêineres. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de Programação Linear Inteira 0-1 capaz de assegurar o carregamento completo de grupo de itens e a estabilidade vertical da carga num conjunto limitado de contêineres. Embora comuns no cotidiano, algumas dessas considerações práticas raramente são tratadas em trabalhos correlatos. Testes computacionais com instâncias adaptadas da literatura foram realizados para validar o modelo proposto. Os resultados mostram que a abordagem é coerente e descreve adequadamente as situações abordadas.

**Palavras-chaves:** Otimização Combinatória, Problema de Carregamento de Contêineres, Carregamento Completo de Grupo de Itens, Estabilidade Vertical.

## 1 INTRODUÇÃO

O Problema de Carregamento de Contêineres (*Container Loading Problem – CLP*) representa, junto à Pesquisa Operacional, um caso particular dos problemas de corte e empacotamento. Para resolvê-lo, procura-se dispor caixas retangulares ortogonalmente, de modo a otimizar a ocupação interna dos contêineres disponíveis. Qualquer arranjo de caixas no interior de um contêiner é denominado padrão de carregamento. É importante assegurar que todas as caixas sejam colocadas inteiramente dentro de um contêiner e que não exista sobreposição de caixas. A melhor ocupação do espaço interno ou a minimização do uso de contêineres pode reduzir substancialmente o preço do transporte de mercadorias, impactando o preço final dos produtos e a relação entre compradores e revendedores.

De acordo com a literatura especializada, o CLP conta com uma série de fatores práticos que devem ser levados em conta em sua resolução. Orientação de caixas, estabilidade da carga, distribuição de peso dentro dos contêineres, carregamento completo de grupos de itens e múltiplos destinos de entrega são algumas das doze considerações práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995) ao se carregar um contêiner e, assim sendo, podem ser levadas em conta ao se propor um algoritmo para resolver o CLP. Bortfeldt e Wäscher (2013) afirmam que, embora nos últimos anos o número de publicações que tratam dos Problemas de Carregamento de Contêineres tenha aumentado, ainda há considerações práticas pouco ou raramente estudadas.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma modelagem matemática para o CLP por meio de Programação Linear Inteira 0-1, capaz de considerar, além do objetivo principal do problema, as restrições práticas de estabilidade vertical da carga e o carregamento completo de grupo de itens. Outras formulações matemáticas para o CLP podem ser encontradas em trabalhos correlatos da literatura,

embora se deva ressaltar que a maioria dessas abordagens não contemplem as considerações práticas do modelo proposto por este trabalho.

Beasley (1985) apresentou uma formulação de Programação Linear Inteira 0-1 para considerar o problema de corte não guilhotinado bidimensional, em que o objetivo é determinar o padrão de corte ótimo de uma chapa retangular que deve ser cortada em peças regulares de tamanhos e valores predeterminados. Essa formulação matemática, embora não aborde diretamente os CLP, pode ser facilmente estendida de modo a considerar problemas tridimensionais de corte e empacotamento. Essa adaptação pode ser encontrada em Junqueira et al. (2012) e demais trabalhos correlatos. Os autores utilizam essa abordagem, com as devidas modificações, para abordar o carregamento de um único contêiner, levando em consideração as restrições práticas de estabilidade da carga, múltiplos destinos, orientação das caixas, entre outras.

Tsai et al. (1993) abordam, por meio de um modelo de Programação Linear Inteira Mista 0-1, o problema de carregamento de paletes do distribuidor. Essa classe de problema consiste em empacotar caixas de tipos e tamanhos variados em um único palete, de tal modo que o volume total ocupado seja máximo. Embora essa abordagem descreva adequadamente o problema tratado, nenhuma restrição prática foi considerada na formulação matemática proposta pelos autores.

Mohanty et al. (1994) fornecem uma heurística baseada em uma formulação de Programação Linear Inteira, que obtém padrões de carregamento para cada contêiner por meio de um processo de geração de colunas. O algoritmo heurístico visa empacotar um subconjunto de caixas retangulares de diferentes valores num conjunto de contêineres disponíveis, de tal modo que o valor total das caixas seja maximizado. Testes computacionais foram efetuados em dezesseis exemplos. Embora os resultados obtidos tenham-se mostrado coerentes, a metodologia de solução proposta não garante a otimalidade dos problemas tratados e, além disso, não leva em consideração nenhuma restrição prática.

Chen et al. (1995) abordam o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos, isto é, contêineres não idênticos, em que um subconjunto de contêineres deve ser selecionado para empacotar todas as caixas disponíveis. O objetivo principal desse problema é minimizar o espaço não utilizado, ou seja, obter a mínima perda de volume dos contêineres designados para o carregamento dos itens. Os autores apresentam uma formulação matemática, por meio de um modelo de Programação Linear Inteira 0-1, para tratar o problema. A metodologia de solução proposta pelos autores, embora não garanta um carregamento estável da carga, considera as restrições de orientação das caixas e de distribuição de peso no interior dos contêineres.

Hifi et al. (2010) apresentam uma formulação de Programação Linear Inteira Mista para o CLP, visando minimizar o número de contêineres idênticos necessá-

rios para empacotar um dado conjunto de caixas regulares. Os autores fornecem algumas desigualdades especiais com a finalidade de melhorar o limitante inferior relaxado da formulação proposta. Testes computacionais, efetuados com exemplos da literatura, mostram que o desempenho da abordagem é satisfatório quando comparado com outros trabalhos correlatos, tal como Martello et al. (2000). No entanto, nenhuma restrição prática foi considerada.

Na literatura do CLP, de modo alternativo aos modelos matemáticos, é comum encontrar outras metodologias de resolução para o problema. Algoritmos heurísticos e meta-heurísticos podem ser obtidos, por exemplo, em Morabito e Arenales (1994), Gehring e Bortfeldt (1997), Pisinger (2002), Bortfeldt et al. (2003), Eley (2003), Cecílio e Morabito (2004), Araújo e Armetano (2007), Yap et al. (2012) e Altarazi (2013). Da mesma forma, métodos exatos, de aproximação e de busca em árvore podem ser encontrados em Mizawa e Wakabayashi (1997), Martello et al. (2000), Hifi (2004), Oliveira e Morabito (2006), Fekete et al. (2007) e Ren et al. (2011).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, o problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrições de carregamento completo e estabilidade vertical é explicado em detalhes, juntamente com um modelo de Programação Linear Inteira para descrevê-lo; na Seção 3, os resultados computacionais obtidos na avaliação do modelo utilizando conjuntos de teste adaptados da literatura são apresentados e analisados; finalmente, na Seção 4, são apresentadas as principais conclusões alcançadas, bem como perspectivas para trabalhos futuros.

## **2 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO**

### **2.1 Descrição do problema**

O Problema de Carregamento de Contêineres é um caso particular dos Problemas de Corte e Empacotamento (*Cutting and Packing Problem* – CPP). Os CPP, como muitos dos problemas de natureza combinatória, abrangem uma variedade de problemas caracterizados por uma estrutura comum, que consistem em combinar unidades menores, denominados itens (peças, caixas, entre outras) dentro de unidades maiores, chamadas de objetos (chapas, contêineres, entre outras), com a finalidade de otimizar certos objetivos predeterminados. Essa combinação, dentro de suas mais variadas versões, pode determinar o padrão de corte de peças para composição de itens encomendados, como também o empacotamento de caixas em contêineres.

Genericamente, os CLP, de acordo com a sua designação, podem ser divididos em dois tipos de subproblemas. Nos primeiros, denominados problemas de minimização das entradas, o espaço de armazenagem é suficiente para a alocação de todas as caixas, visto que o número de contêineres é, em geral, irrestrito. Logo,

busca-se minimizar o número de contêineres necessários para carregar todos os itens disponíveis. Já nos demais, chamados problemas de maximização das saídas, o espaço de um número limitado de contêineres não é suficiente para armazenar todos os itens. O objetivo é, então, determinar um subconjunto de caixas que maximiza a utilização do volume dos contêineres ou o valor associado à carga. Na literatura do CLP, esses problemas também são conhecidos como Problema de Carregamento de *Bins* (*Bin Packing Problem* – BPP) e Problema da Mochila Tridimensional (*Three Dimensional Knapsack Problem* – 3DKP), respectivamente.

No entanto, uma classificação mais adequada para os CLP pode ser obtida de acordo com a tipologia de Wäscher et al. (2007) proposta para categorizar os CPP. Os autores, por meio de combinações de critérios básicos, como dimensionalidade, variedade dos itens, variedade dos objetos, forma dos itens e tipo de designação (minimização ou maximização), classificam os mais variados tipos de CPP, e consequentemente os CLP, em problemas do tipo básico, intermediário e refinado. O tipo intermediário de CLP é o mais encontrado na literatura especializada, em que, com base nos critérios de variedade dos itens, variedade dos objetos e designação, Wäscher et al. (2007) descrevem sete problemas do tipo minimização das entradas:

- *Single Stock-Size Cutting Stock Problem* (SSSCSP): empacotar um dado conjunto de caixas fracamente heterogêneas num número mínimo de contêineres idênticos.
- *Multiple Stock-Size Cutting Stock Problem* (MSSCSP): selecionar um subconjunto de contêineres fracamente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fracamente heterogêneas, de modo que o valor dos contêineres designados seja minimizado.
- *Residual Cutting Stock Problem* (RCSP): selecionar um subconjunto de contêineres fortemente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fracamente heterogêneas, de forma que o valor dos contêineres designados seja minimizado.
- *Single Bin-Size Bin Packing Problem* (SBSBPP): empacotar um conjunto fortemente heterogêneo de caixas num número mínimo de contêineres idênticos.
- *Multiple Bin-Size Bin Packing Problem* (MBSBPP): selecionar um subconjunto de contêineres fracamente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fortemente heterogêneas, de modo que o valor dos contêineres selecionados seja minimizado.
- *Residual Bin Packing Problem* (RBPP): selecionar um subconjunto de contêineres fortemente heterogêneos para empacotar um conjunto de caixas fortemente heterogêneas, de modo que o valor dos contêineres designados seja minimizado.
- *Open Dimension Problem* (ODP): empacotar um conjunto de caixas (se fortemente heterogêneas (ODP/S) – se fracamente heterogêneas (ODP/W)) em um único contêiner disponível contendo uma ou mais dimensões variáveis, de modo que o volume do contêiner seja minimizado.

A Figura 1 apresenta um panorama dos problemas do tipo minimização das entradas.

características dos contêineres		diversidade dos itens	
		fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
dimensões fixas	idênticos	Single Stock Size Cutting Stock Problem SSSCSP	Single Bin Size Bin Packing Problem SBSBPP
	fracamente heterogêneos	Multiple Stock Size Cutting Stock Problem MSSCSP	Multiple Bin Size Bin Packing Problem MBSBPP
	fortemente heterogêneos	Residual Cutting Stock Problem RCSP	Residual Bin Packing Problem RBPP
único contêiner com uma ou mais dimensões variáveis		Open Dimension Problem ODP	

**Figura 1** Problemas de carregamento de contêineres do tipo minimização das entradas.

Fonte: adaptada de Wäscher et al. (2007).

Já os problemas do tipo maximização das saídas são classificados por Wäscher et al. (2007) da seguinte maneira:

- *Identical Item Packing Problem* (IIPP): empacotar um número máximo de caixas idênticas em um único contêiner.
- *Single Large Object Placement Problem* (SLOPP): empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um único contêiner, de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.
- *Multiple Identical Large Object Placement Problem* (MILOPP): empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um conjunto de contêineres idênticos, de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.
- *Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem* (MHLOPP): empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um conjunto de contêineres (fracamente ou fortemente heterogêneos), de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.
- *Single Knapsack Problem* (SKP): empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um único contêiner, de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.
- *Multiple Identical Knapsack Problem* (MIKP): empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um conjunto de contêineres idênticos, de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.

- *Multiple Heterogeneous Knapsack Problem* (MHKP): empacotar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um conjunto de contêineres (fracamente ou fortemente heterogêneos), de modo que o valor (volume) total das caixas carregadas seja maximizado.

A Figura 2 apresenta um resumo dos problemas do tipo maximização das saídas.

características dos contêineres \ diversidade dos itens		idênticos	fracamente heterogêneos	fortemente heterogêneos
		dimensões fixas	único contêiner	Identical Item Packing Problem IIPP
idênticos	X		Multiple Identical Large Object Placement Problem MILOPP	Multiple Identical Knapsack Problem MIKP
heterogêneos			Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem MHLOPP	Multiple Heterogeneous Knapsack Problem MHKP

**Figura 2** Problemas de carregamento de contêineres do tipo maximização das saídas.

Fonte: adaptada de Wäscher et al. (2007).

Com base na tipologia descrita anteriormente, o modelo matemático proposto neste trabalho trata de problemas do tipo MILOPP e MIKP, no qual os contêineres são idênticos, ou seja, possuem as mesmas dimensões e, conseqüentemente, o mesmo volume interno.

## 2.2 Restrições práticas em problemas de carregamento de contêineres

Na resolução de um problema de carregamento de contêineres, além da otimização do objetivo principal, deve-se garantir que não exista sobreposição de itens e que haja acomodação por completo das caixas dentro das limitações físicas dos contêineres. Bischoff e Ratcliff (1995) descrevem doze considerações práticas, listadas a seguir, que podem ser incorporadas às técnicas de resolução do CLP, visando a obtenção de padrões de carregamento mais realistas.

- Orientação das caixas: algumas caixas podem ser rotacionadas em sentidos específicos dentro do contêiner, por exemplo, caixas que contenham informação do tipo “este lado para cima”.
- Empilhamento máximo: refere-se ao limite máximo de peso que pode ser empilhado sobre uma determinada caixa, ou ainda, à pressão máxima

que pode ser exercida sobre a face superior da caixa de modo que não ocorram avarias. Por exemplo, caixas com informação do tipo “não empilhe mais do que  $x$  unidades”.

- **Manuseio:** o peso, o tamanho ou o equipamento que realiza o processo carga/descarga podem influenciar no arranjo das caixas dentro do contêiner. Por exemplo, pode ser necessário, por questões de segurança, que certos itens sejam alocados próximos à porta do contêiner, ou ainda, que caixas pesadas sejam posicionadas num limite máximo de altura.
- **Estabilidade da carga:** condição que garante que porções mínimas das faces das caixas estejam apoiadas. Pode ser dividida em estabilidade vertical (suporte das faces inferiores) e estabilidade horizontal (suporte das faces laterais). Essa restrição é fundamental para evitar danos aos produtos durante o transporte e garantir a segurança dos operadores, especialmente durante o procedimento de descarga.
- **Agrupamento de itens:** caixas de um mesmo tipo ou que pertencem a um mesmo grupo (por exemplo, mesmo destino) devem ser posicionadas próximas dentro do contêiner. Essa restrição pode, por exemplo, facilitar o procedimento de checagem dos itens durante o processo carga/descarga.
- **Múltiplos destinos:** se um contêiner (ou caminhão) for designado para realizar entregas em vários destinos (clientes), é fundamental que caixas de um mesmo pedido estejam posicionadas próximas umas às outras. Além disso, devem ser carregadas de modo a considerar o roteiro a ser percorrido pelo contêiner e a ordem em que elas serão descarregadas. Essas suposições são fundamentais para evitar operações desnecessárias do tipo carga/descarga nos pontos de destinos.
- **Separação de itens:** pode ser necessário garantir que determinadas caixas fiquem separadas dentro de um mesmo contêiner ou até mesmo que sejam carregadas em contêineres distintos. Por exemplo, produtos alimentícios devem ser posicionados distantes de artigos de perfumarias e outros produtos químicos.
- **Carregamento completo de grupo de itens:** em alguns casos, deve-se garantir que um subconjunto da carga seja integralmente carregado (ou deixado de fora do carregamento), mesmo que isso ocasione o desperdício de parte do volume útil do contêiner. Isto é, se uma caixa pertencente a um determinado grupo for carregada, deve-se garantir que todas as demais caixas também sejam transportadas ou, de modo alternativo, se uma caixa não for carregada, nenhum dos demais itens desse subconjunto deve integrar o carregamento. Para exemplificar, pode-se considerar uma máquina (móvel, carro etc.) que se encontra embalada em diversas caixas. Na prática, exige-se que todas as unidades dessas caixas integrem o carregamento. Tais subconjuntos serão chamados, no decorrer deste trabalho, de grupo de caixas (itens) ou simplesmente, grupos.
- **Prioridade de embarque:** o envio de certas caixas pode ser mais importante que o de outras. Por exemplo, caixas próximas da data de venci-



mento ou com urgência de entrega devem ter preferência no padrão de carregamento.

- Complexidade do padrão de carregamento: padrões de carregamento mais complexos podem, inevitavelmente, demandar esforços ou equipamentos extras. Casos críticos, de ausência de tecnologia, de dispositivos que efetuam o processo carga/descarga, ou simplesmente de recursos humanos, podem implicar o impedimento imediato do carregamento de determinados tipos de caixas.
- Limite de peso: o peso total das caixas empacotadas não deve exceder o limite máximo suportado pelo contêiner, ou ainda, exceder o limite máximo de peso permitido por uma via de trânsito.
- Distribuição de peso dentro do contêiner: do ponto de vista do transporte do contêiner carregado, é fundamental que o peso da carga esteja distribuído o máximo possível sobre o piso do contêiner, isto é, que o centro de gravidade de um contêiner carregado esteja próximo do centro geométrico do plano que define a base. Uma carga com o peso não uniformemente distribuído dificulta ou impossibilita certas operações de manuseio, além de comprometer substancialmente a segurança dos operadores, principalmente quando o transporte da carga é efetuado por rodovias.

### 2.3 Modelo matemático e restrição de estabilidade vertical

Segundo Junqueira et al. (2012), a restrição prática de estabilidade pode ser dividida em dois casos: estabilidade horizontal e estabilidade vertical. Em síntese, procura-se oferecer sustentação da face inferior das caixas, no caso de estabilidade vertical, ou no suporte das faces laterais, quando se trata de estabilidade horizontal. Por simplicidade, este artigo aborda apenas a estabilidade vertical, por meio de um parâmetro, proposto por Eley (2002), que define o percentual mínimo de estabilidade vertical que deve ser considerado no carregamento do contêiner.

O modelo proposto é uma extensão para problemas do tipo MILOPP e MIKP da modelagem para carregamento de um único contêiner apresentada por Junqueira et al. (2012). Um total de  $C$  contêineres idênticos,  $C \geq 1$ , cujas largura, comprimento e altura são, respectivamente,  $L$ ,  $W$  e  $H$ , devem ser carregados com  $m$  tipos de caixas distintas. Cada caixa do tipo  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , que deve ser alocada em um contêiner  $k$ ,  $k = 1, \dots, C$ , que possui largura  $l_i$ , comprimento  $w_i$ , altura  $h_i$  e volume  $v_i$ . Além disso, o problema é restrito no que diz respeito à quantidade de caixas disponíveis para carregamento, isto é, existe um total de  $b_i$  caixas do tipo  $i$  que podem ser colocadas no interior dos contêineres.

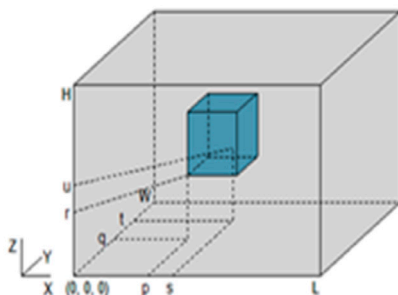
Tomando o sistema de coordenadas cartesiano, seja  $(p, q, r)$  o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa do tipo  $i$  no interior de um contêiner  $k$  (ver Figura 3). Os conjuntos a seguir, definidos por Junqueira et al. (2012), indicam as possíveis localizações que a caixa pode assumir em relação às dimensões de cada contêiner,

considerando ainda que as caixas possuam orientação fixa, isto é, a largura, o comprimento e a altura das caixas são paralelos às respectivas dimensões do contêiner:

$$X = \{p \mid 0 \leq p \leq L - \min_i(l_i), p \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$Y = \{q \mid 0 \leq q \leq W - \min_i(w_i), q \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$Z = \{r \mid 0 \leq r \leq H - \min_i(h_i), r \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\} \quad (3)$$



**Figura 3** Uma caixa do tipo  $i$  no interior de um contêiner  $k$ .

Fonte: adaptada de Junqueira et al. (2012).

Com a finalidade de reduzir a cardinalidade dos conjuntos, e consequentemente reduzir as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo dos eixos do contêiner, os autores redefinem esses conjuntos, de acordo com as seções cônicas e os padrões normais apresentados por Herz (1972) e Christofides e Whittlock (1977), da seguinte forma:

$$X = \{p \mid p = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot l_i, 0 \leq p \leq L - \min_i(l_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (4)$$

$$Y = \{q \mid q = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot w_i, 0 \leq q \leq W - \min_i(w_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (5)$$

$$Z = \{r \mid r = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \cdot h_i, 0 \leq r \leq H - \min_i(h_i), 0 \leq \varepsilon_i \leq b_i \text{ e inteiro}, i = 1, \dots, m\} \quad (6)$$

Embora os elementos dos conjuntos (4)-(6) restrinjam-se a números inteiros, essa condição pode ser facilmente relaxada. As variáveis de decisão do modelo são variáveis binárias definidas como:

$$x_{ikpqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice inferior frontal} \\ & \text{esquerdo no ponto } (p, q, r) \text{ do contêiner } k, \text{ tal que} \\ & 0 \leq p \leq L - l_i, 0 \leq q \leq W - w_i, 0 \leq r \leq H - h_i; \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

Considere também os conjuntos:

$$X_i = \{p \in X \mid 0 \leq p \leq L - l_i\} \quad (8)$$

$$Y_i = \{q \in Y \mid 0 \leq q \leq W - w_i\} \quad (9)$$

$$Z_i = \{r \in Z \mid 0 \leq r \leq H - h_i\} \quad (10)$$

O modelo para problemas do tipo MILOPP e MIKP é formulado a partir da formulação de Junqueira et al. (2012) da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } \sum_{k=1}^C \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} v_i \cdot x_{ikpqr} \quad (11)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_i \mid s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_i \mid t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_i \mid u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ikpqr} \leq 1,$$

$$k = 1, \dots, C, s \in X, t \in Y, u \in Z \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^C \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ikpqr} \leq b_i, i = 1, \dots, m \quad (13)$$

$$\sum_{\{i \mid r'-h_i \geq 0\}} \sum_{\{p \in X_i \mid p'-l_i+1 \leq p \leq p'+l_i-1\}} \sum_{\{q \in Y_i \mid q'+w_i+1 \leq q \leq q'+w_i-1\}} L_{ij} \cdot W_{ij} \cdot x_{ikpqr} \geq \alpha \cdot l_j \cdot w_j \cdot x_{jkip'q'r'}$$

$$k = 1, \dots, C, p' \in X_j, q' \in Y_j, r' \in Z_j^*, j = 1, \dots, m \quad (14)$$

onde

$$\begin{cases} L_{ij} = \min(p + l_i, p' + l_j) - \max(p, p') \\ W_{ij} = \min(q + w_i, q' + w_j) - \max(q, q') \end{cases}$$

$$x_{ikpqr} \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, C, p \in X_i, q \in Y_i, r \in Z_i$$

$$s \in X, t \in Y, u \in Z, p' \in X_j, q' \in Y_j, r' \in Z_j^*, j = 1, \dots, m \quad (15)$$

No modelo matemático, a função objetivo, representada pela Equação (11), maximiza o volume das caixas alocadas nos  $C$  contêineres disponíveis; a Equação (12) evita a sobreposição de caixas nos contêineres, impedindo a ocupação de

um ponto  $(s, t, u)$  qualquer no interior de uma caixa cujo vértice inferior frontal esquerdo é o ponto  $(p, q, r)$  por uma caixa distinta; a Equação (13) não permite o carregamento de caixas do tipo  $i$  além da disponibilidade máxima; a Equação (14) assegura que uma porcentagem mínima da área da base das caixas está apoiada por outras caixas (ou pelo piso do contêiner); por fim, a Equação (15) define o domínio das variáveis do modelo.

Na formulação matemática do problema, definida por (11)-(15), a Equação (13) define apenas a limitação máxima de caixas que podem ser carregadas nos contêineres disponíveis. No entanto, caso se necessite garantir o carregamento de quantidades mínimas de caixas ( $B_i$ ), pode-se adicionar a seguinte restrição ao modelo:

$$B_i \leq \sum_{k=1}^C \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ikpqr}, i = 1, \dots, m \quad (16)$$

Na literatura técnica, os problemas que possuem a exigência de limites de caixas que devem ser enviadas, sejam quantidades mínimas ou máximas, são conhecidos como problemas restritos. Já problemas com disponibilidade ilimitada de caixas são conhecidos como problemas irrestritos. No primeiro tipo de problema, o modelo deve ser composto, conforme necessidade, pelas Equações (13) e/ou (16). Por outro lado, caso o problema seja irrestrito, essas equações devem ser obrigatoriamente excluídas do modelo.

A formulação matemática para o problema, tal como definida anteriormente, embora aborde exclusivamente o carregamento de múltiplos contêineres idênticos, pode ser facilmente estendida aos problemas que contenham múltiplos contêineres heterogêneos. Os ajustes necessários para problemas com  $T$  tipos distintos de contêineres são: acréscimo de um índice  $j$  na variável de decisão ( $x_{ijkpqr}$ ), para indicar o tipo de contêiner designado entre os diversos tipos disponíveis; a inclusão de um somatório extra, variando de 1 a  $T$ , na função objetivo (Equação 11) e na restrição de limitação do número de caixas (Equação 13); e repetir as Equações (12) e (14) para cada tipo distinto de contêiner. Além disso, deve-se gerar novamente os conjuntos (1)-(3) e (8)-(10) para cada tipo específico de contêiner, de modo a obter os possíveis pontos candidatos a vértice para os contêineres considerados.

Além disso, o modelo apresentado também pode ser adaptado de forma a considerar problemas do tipo minimização das entradas. Para isso, basta apenas redefinir a função objetivo para minimizar o número de contêineres designados, ou ainda, minimizar a perda de volume, ajustar a Equação (12) pelo acréscimo de uma nova variável binária, para evitar a sobreposição das caixas apenas nos contêineres selecionados e, por fim, substituir a Equação (13) por uma igualdade, visto que em problemas dessa natureza os contêineres são suficientes para empacotar todas as caixas disponíveis.

## 2.4 Restrição de carregamento completo de grupo de itens

Para Bischoff e Ratcliff (1995), em situações que envolvem o carregamento completo de grupo de itens, há a exigência de que todas as caixas que fazem parte de uma entidade funcional (grupos de itens contendo peças de um produto eletrônico, por exemplo) devem estar presentes no padrão de carregamento. De acordo com Eley (2003), essa restrição prática pode ser dividida em quatro variantes distintas:

- Variante 1: um grupo composto por caixas de um único tipo que deve ser completamente carregado ou deixado de fora do carregamento.
- Variante 2: um grupo de caixas de tipos distintos deve ser completamente carregado ou deixado de fora do carregamento. Esta variante difere da primeira pelos tipos de caixas que compõe o grupo, isto é, mais de um tipo de caixa pode pertencer ao grupo.
- Variante 3: o número de caixas de um dado tipo deve ser múltiplo de determinado número.
- Variante 4: uma combinação de caixas de tipos distintos, chamada por Eley (2003) de grupo de carregamento completo, deve ser múltiplo de um dado tamanho de lote. Por exemplo, considere uma máquina que, desmontada para transporte, é constituída de 3 caixas do tipo 1 e 5 caixas do tipo 2. Se a decisão for empacotar  $x$  máquinas, então,  $3x$  caixas do tipo 1 e  $5x$  caixas do tipo 2 devem integrar o padrão de carregamento.

Este trabalho trata da restrição de carregamento completo da variante 3. Se, por exemplo, um grupo é formado por sete caixas de mesmo tipo, o modelo proposto busca garantir que o total de caixas carregadas desse tipo seja um múltiplo de sete. Vale ressaltar que, no modelo proposto neste trabalho, as caixas que compõe um dado grupo não precisam necessariamente ser carregadas no mesmo contêiner, isto é, itens de um grupo podem ser alocadas em diferentes contêineres, desde que todas as caixas do grupo façam parte do padrão de carregamento. Além disso, destaca-se que essa restrição prática é aplicável apenas aos problemas do tipo maximização das saídas, visto que em problemas do tipo minimização das entradas todas as caixas serão obrigatoriamente carregadas nos contêineres disponíveis.

Considere grupos de caixas do tipo  $i$  compostos por  $\zeta_i$  unidades. A variante 3 da restrição de carregamento completo visa carregar  $y_i$  grupos de caixas idênticas, e é formulada da seguinte maneira:

$$\sum_{k=1}^C \sum_{p \in X_i} \sum_{q \in Y_i} \sum_{r \in Z_i} x_{ikpqr} = \zeta_i \cdot y_i, \quad y_i \in \mathbb{Z}_+ \quad (17)$$

A Equação (17) garante que a quantidade de caixas alocadas no interior dos contêineres seja múltipla do total de caixas que formam o grupo. Observe que,

caso seja atribuído o valor nulo à variável inteira  $y_i$ , nenhum grupo irá pertencer ao carregamento. Por outro lado, valores superiores indicam a quantidade de grupos idênticos de tamanho  $\zeta_i$  alocados nos contêineres disponíveis.

### 3 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os testes computacionais foram realizados em três cenários distintos. No primeiro, os modelos foram testados através das Equações (11)-(13) e da Equação (15), isto é, considerando apenas restrições de não sobreposição e limitação de caixas. O segundo cenário, com as Equações (11)-(15), foi elaborado com o acréscimo da restrição de estabilidade vertical definida pela Equação (14) aos modelos do caso anterior. Quando a restrição de carregamento completo apresentada na Seção 2.4 é incorporada ao modelo matemático da Seção 2.3, obtém-se o último cenário, formado pelas Equações (11)-(15) e (17). Os modelos foram gerados por meio de um algoritmo em linguagem de programação *Microsoft Visual Basic .NET 2012*©, e resolvidos utilizando o *software CPLEX*© *Interactive Optimizer* (versão 12.5.1) com parâmetros padrão dele. Os testes foram efetuados em um computador com sistema operacional Microsoft Windows 7, processador Intel® Core™ i3 de 2.53 GHz, memória RAM de 4 GB e sistema operacional de 32 bits. Não foi estabelecido um limite de tempo para execução dos testes.

Os modelos foram avaliados utilizando uma adaptação dos conjuntos de testes propostos por Mohanty et al. (1994). Um dos contêineres em cada um dos conjuntos originais foi escolhido através de um processo aleatório de seleção. A quantidade disponível deles foi estipulada como o dobro da disponibilidade original do contêiner escolhido. As dimensões, os tipos e a disponibilidade das caixas não sofreram alterações. Os conjuntos de testes adaptados estão sumarizados na Tabela 1.

Para considerar a restrição prática de carregamento completo, optou-se por utilizar a mesma metodologia empregada por Eley (2003), criando dois grupos de itens que devem ser completamente carregados: o primeiro é formado por 7% do total das caixas disponíveis do tipo 1, enquanto o segundo é composto por 12% da totalidade de caixas do tipo 2. Nos casos em que o cálculo da porcentagem retornava um número não inteiro, a parte fracionária do valor foi descartada e uma unidade foi adicionada à parte inteira do resultado inicial, de modo que a quantidade de caixas seja inteira em todos os grupos de itens. Para os modelos que possuem restrição de estabilidade vertical, a constante de estabilidade foi definida em  $\alpha = 1$ , isto é, a face inferior de cada caixa carregada deve estar totalmente apoiada nas demais caixas ou no piso do contêiner.

A Tabela 2 apresenta um resumo da quantidade de variáveis e restrições presentes em cada um dos modelos gerados para teste. Alguns modelos não puderam

ser gerados em razão de insuficiência de memória computacional. Essas situações são representadas na tabela pelo símbolo “-”.

O problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos, proposto nas Equações (11)-(13) e (15), possui em sua formulação apenas restrições de não sobreposição e de limitação da quantidade de caixas, as quais são compostas unicamente por variáveis binárias. Similar ao modelo de Junqueira et al. (2012), percebe-se que, à medida que há um aumento na variedade de caixas, ou quando as mesmas possuem dimensões pequenas em relação aos contêineres, ocorre um aumento no número de restrições de cada modelo. Aqui, chama a atenção o papel desempenhado pela quantidade de contêineres disponíveis para carregamento; há um aumento significativo no número de restrições de não sobreposição quando mais contêineres são considerados (comparar os conjuntos 2 e 7). Os modelos propostos nas Equações (11)-(15) possuem a mesma totalidade de variáveis binárias e restrições do modelo das Equações (11)-(13) e (15); entretanto, o acréscimo da restrição de estabilidade vertical ao modelo faz aumentar substancialmente o número de restrições (ver os conjuntos 2 e 15).

Quando os modelos passam a considerar a restrição de carregamento completo, por meio da adição da Equação (17) ao proposto pelas Equações (11)-(15), o número de variáveis binárias permanece inalterado em relação ao problema de carregamento de múltiplos contêineres sem carregamento completo. Esse fato já era esperado, uma vez que, como não houve nenhuma alteração nas dimensões dos contêineres, também não deve existir nenhuma mudança na quantidade e na formulação das restrições de não sobreposição. Entretanto, como nos conjuntos de testes a quantidade de caixas dos tipos 1 e 2 a serem empacotadas deve ser múltipla do total de caixas que compõem os grupos de itens, duas variáveis inteiras positivas são adicionadas aos problemas testados. O acréscimo de restrições de carregamento completo ocorre na mesma ordem, isto é, se há  $g$  grupos de itens, os modelos (11)-(15) e (17) terão, em sua formulação,  $g$  restrições desse tipo.

Tabela 1 Conjuntos de teste adaptados de Mohanty et al. (1994).

Conjunto de Teste	Caixas				
	Tipo	Disponibilidade	Dimensões		
	$l$	$b_i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$
1	1	20	2	6	8
	2	50	8	4	10
2	1	45	8	16	4
	2	60	8	8	8
	3	50	8	12	12
	4	25	12	4	4
3	1	35	10	5	5
	2	40	5	15	10
	3	28	5	15	15
4	1	50	36	28	24
	2	60	40	32	20
5	1	25	15	20	25
	2	30	10	15	10
	3	40	20	25	35
6	1	28	18	10	8
	2	37	12	14	10
	3	30	6	10	8
7	1	15	7	4	10
	2	12	3	5	11
	3	20	6	9	12
8	1	20	6	8	11
	2	17	5	15	9
	3	13	4	13	7
	4	24	12	13	8
	5	21	10	14	11
	6	80	8	2	4



Contêineres				
Disponibilidade	Dimensões			Volume Total dos Contêineres
K	L	W	H	VT
4	14	14	14	10 976
10	20	16	20	64 000
2	20	15	25	15 000
10	40	36	52	748 800
4	35	25	40	140 000
10	18	16	20	57 600
2	20	15	29	17 400
4	17	16	20	21 760

Conjunto de Teste	Caixas				
	Tipo	Disponibilidade	Dimensões		
	$l$	$b_i$	$l_i$	$w_i$	$h_i$
9	1	18	10	13	11
	2	20	8	9	10
	3	12	7	12	15
	4	22	14	15	11
10	1	50	2	4	16
	2	70	2	8	16
	3	80	8	2	4
11	1	30	5	11	14
	2	28	9	12	10
	3	37	7	13	17
	4	23	10	10	8
12	1	35	3	6	8
	2	40	5	9	4
	3	15	8	9	12
13	1	56	7	8	3
	2	28	12	11	4
14	1	25	4	8	6
	2	32	10	12	6
	3	45	14	14	8
15	1	25	6	6	9
	2	25	12	10	8
	3	15	4	7	5
	4	20	7	9	11
16	1	35	15	18	17
	2	30	11	14	11
	3	25	24	26	15

Fonte: adaptada de Mohanty et al. (1994).

Contêineres				
Disponibilidade	Dimensões			Volume Total dos Contêineres
K	L	W	H	VT
2	40	22	26	45 760
2	16	16	16	8 192
2	19	15	26	14 820
2	20	18	12	8 640
4	18	15	9	9 720
4	20	20	10	16 000
4	28	14	18	28 224
2	48	70	32	245 040

Tabela 2 Número de restrições e de variáveis dos modelos propostos.

Conjunto de Teste	N°. de Variáveis		N°. de Restrições			
	Binárias	Inteiras	Não Sobreposição	Disponibilidade de Caixas	Estabilidade Vertical	Carregamento Completo
1	4 816	2	4 004	2	4 040	2
2	43 160	2	28 730	4	40 040	2
3	5 946	2	7 392	3	5 640	2
4	14 700	2	14 850	2	14 200	2
5	-	-	-	-	-	-
6	15 050	2	11 830	3	13 860	2
7	18 024	2	8 640	3	17 082	2
8	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-
10	4 170	2	5 850	3	3 240	2
11	6 506	2	3 420	4	6 070	2
12	5 480	2	4 212	3	4 432	2
13	3 528	2	2 688	2	3 004	2
14	6 988	2	4 420	3	5 512	2
15	27 444	2	12 600	4	24 948	2
16	-	-	-	-	-	-

A Tabela 3 apresenta um sumário dos resultados obtidos após a realização dos testes. Em alguns casos, o computador não possuía memória suficiente para gerar o modelo. Assim, não há informações relevantes quanto à porcentagem de ocupação dos contêineres nem quanto ao tempo de execução. Tal como na Tabela 2, o símbolo “-” foi empregado nesses casos.

Uma breve análise mostra que, nos modelos com as Equações (11)-(13) e (15) a ocupação média do volume disponível dos contêineres foi de 73,70%, com desvio padrão de 18,72%. Esses valores são próximos aos obtidos com os modelos com estabilidade vertical (73,29 e 18,91%, respectivamente) e com os modelos com restrição de estabilidade e carregamento de grupos (72,89 e 18,82%, respectivamente).

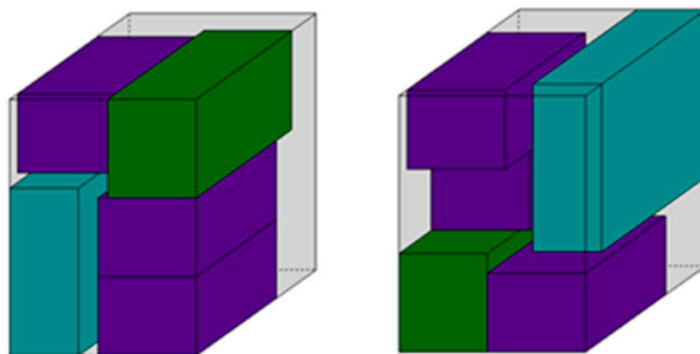
Quanto ao tempo necessário para a resolução dos modelos temos que, nas Equações (11)-(13) e (15), o tempo médio de resolução foi de 35,42 segundos, com desvio padrão de 82,78 segundos. Já para os modelos das Equações (11)-(15) e Equações (11)-(15) e (17) o tempo médio decorrido foi de 48,69 segundos (com

**Tabela 3** Panorama dos testes computacionais efetuados com os modelos propostos.

Conjunto de Teste	Sem Carregamento Completo e Sem Estabilidade Vertical – Equações (11)-(13) e (15)				Sem Carregamento Completo e Com Estabilidade Vertical – Equações (11)-(15)				Com Carregamento Completo e Com Estabilidade Vertical – Equações (11)-(15) e (17)			
	Função Objeto	Ocupação (%)	Tempo (s)	Função Objeto	Ocupação (%)	Tempo (s)	Função Objeto	Ocupação (%)	Tempo (s)	Função Objeto	Ocupação (%)	Tempo (s)
	1	5 760	52,48	0,45	5 760	52,48	0,17	5 760	52,48	0,22	5 760	52,48
2	52 800	82,50	293,13	52 800	82,50	84,29	52 800	82,50	100,09	52 800	82,50	100,09
3	15 000	100,00	10,13	15 000	100,00	2,34	15 000	100,00	2,34	15 000	100,00	2,34
4	512 000	68,38	17,77	512 000	68,38	1,12	506 368	67,62	1,22	506 368	67,62	1,22
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	43 200	75,00	5,34	43 200	75,00	1,83	43 200	75,00	1,81	43 200	75,00	1,81
7	11 436	65,72	54,52	11 436	65,72	14,27	11 436	65,72	10,64	11 436	65,72	10,64
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10	8 192	100,00	3,60	8 192	100,00	1,50	8 192	100,00	1,67	8 192	100,00	1,67
11	10 054	67,84	3,09	9 328	62,94	2,59	9 120	61,54	6,40	9 120	61,54	6,40
12	8 640	100,00	2,29	8 640	100,00	1,98	8 496	98,33	39,97	8 496	98,33	39,97
13	4 224	43,46	0,44	4 224	43,46	0,78	4 224	43,46	0,84	4 224	43,46	0,84
14	9 600	60,00	1,78	9 600	60,00	0,50	9 600	60,00	0,50	9 600	60,00	0,50
15	19 476	69,01	32,51	19 476	69,01	472,85	19 209	68,06	830,74	19 209	68,06	830,74
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Média		73,70	35,42		73,29	48,69		72,89	83,04		72,89	83,04
Desvio Padrão		18,72	82,78		18,91	135,67		18,82	237,25		18,82	237,25

desvio padrão de 135,67) e 83,04 segundos (com desvio padrão de 237,25), respectivamente. Embora tenha obtido o menor tempo médio, o primeiro cenário obteve tempo superior em 8 dos 12 testes realizados (em destaque na Tabela 3). Vale destacar a expressiva contribuição do conjunto de teste 15 no aumento do tempo médio do segundo e terceiro cenários. Contudo, percebe-se, em geral, que o acréscimo das restrições práticas de estabilidade vertical e carregamento completo de grupos não afetou substancialmente o tempo de resolução dos modelos propostos.

As Figuras 4, 5 e 6 mostram, respectivamente, o padrão de carga obtido para o conjunto de teste 11 com os modelos das Equações (11)-(13) e (15), Equações (11)-(15) e Equações (11)-(15) e (17). As caixas foram coloridas de acordo com os tipos de itens: tipo 1 – roxo; tipo 2 – verde; tipo 3 – azul claro; tipo 4 – azul escuro. Cabe lembrar que, para os modelos com restrição de carregamento completo, as caixas do tipo 1 e 2 formam grupos de caixas. De acordo com a formação de grupos proposta por Eley (2003), temos que a quantidade de caixas do grupo 1 é  $\zeta_1 = 3$ , enquanto para o grupo 2, tem-se  $\zeta_2 = 4$ .

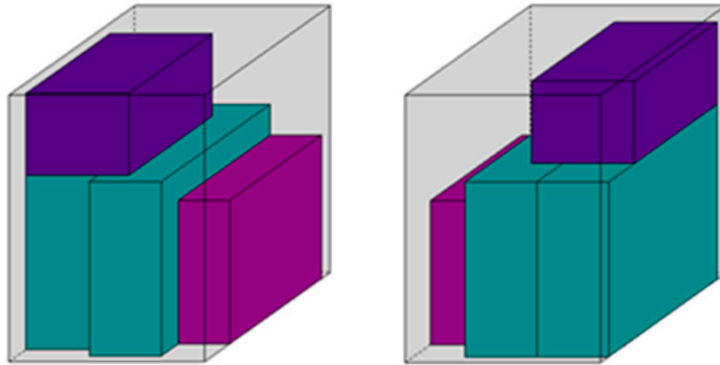


**Figura 4** Padrão de carregamento do conjunto de teste 11 obtido pelo modelo das Equações (11)-(13) e (15).

O padrão de carga apresentado na Figura 4, embora não possua estabilidade vertical, conta com a maior ocupação do volume total dos contêineres disponíveis. Esse fato só reforça o esperado, pois esse é o cenário que possui a menor quantidade de considerações práticas. Por outro lado, apesar de uma menor ocupação do volume disponível dos contêineres, o padrão de carga apresentado na Figura 5 apresenta estabilidade vertical em todas as caixas do carregamento.

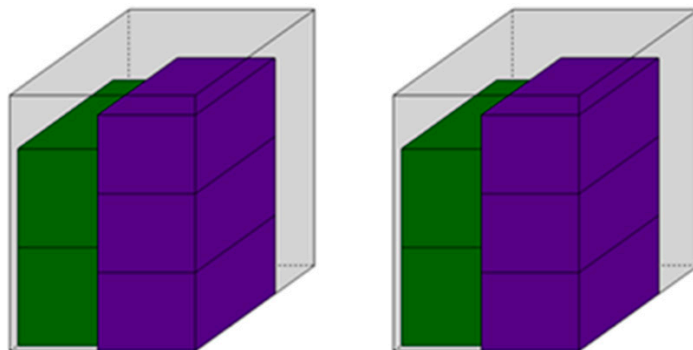
Dos três cenários testados, o padrão de carga apresentado na Figura 6 obteve a menor ocupação do volume disponível (conferir Tabela 3). Esse cenário, composto pelos grupos 1 e 2, carregou apenas caixas do grupo 2 (4 unidades, ou seja, multiplicidade do conjunto igual a um) e exemplares de caixas do tipo 4 (6 unidades). Percebe-se que a exigência de carregamento de múltiplos de  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  diminui substancialmente a quantidade de caixas do tipo  $i = 3$  (verificar Figura

4), acarretando um melhor aproveitamento do espaço dos contêineres quando a restrição de carregamento completo de grupos de itens não é considerada no modelo (Figura 4 e Figura 5).



**Figura 5** Padrão de carregamento do conjunto de teste 11 obtido pelo modelo das Equações (11)–(15).

Em vista da grande demanda de memória computacional para geração dos modelos e realização dos cálculos das possíveis posições que as caixas podem assumir ao serem empacotadas nos contêineres, alguns conjuntos de teste não puderam ser avaliados. Assim, a modelagem apresentada neste trabalho pode ter dificuldades para tratar problemas reais, que envolvem diversos contêineres de mesma dimensão e variados tipos de caixas. Entretanto, vale ressaltar que, como apontado na Tabela 2, os modelos testados possuem um alto número de variáveis e restrições, sendo bastante trabalhosa a tarefa de encontrar uma solução adequada para eles.



**Figura 6** Padrão de carregamento do conjunto de teste 11 obtido pelo modelo das Equações (11)–(15) e (17).

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma proposta de modelagem matemática para o problema de carregamento de múltiplos contêineres idênticos com restrições de estabilidade vertical e carregamento completo de grupo de itens, baseada em Programação Linear Inteira 0-1. Essa abordagem visa alocar completamente um dado conjunto de caixas de tamanhos distintos em contêineres idênticos, de modo a otimizar o uso do espaço de cada contêiner, garantindo que certo subconjunto de caixas se faça, obrigatoriamente, presente no padrão de carregamento e, ainda, que os itens possuam um percentual mínimo de apoio de sua base.

O *software* de otimização CPLEX© Interactive Optimizer foi utilizado para efetuar testes computacionais com dados adaptados da literatura de carregamento de contêineres. Os resultados obtidos mostraram que os modelos propostos representam corretamente as considerações práticas tratadas, embora a otimalidade seja alcançada apenas em modelos de tamanho moderado, em virtude da necessidade de avaliar as possíveis posições de cada caixa nos contêineres disponíveis. Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a abordagem proposta é capaz de resolver, em tempo computacional aceitável, apenas problemas poucos realísticos. No entanto, a modelagem pode servir como motivação para futuras pesquisas que explorem outros métodos de solução, como procedimentos heurísticos, métodos de relaxação, entre outros.

A modelagem matemática apresentada neste trabalho, oriunda de uma adaptação do modelo proposto por Junqueira et al. (2012), demonstra ser uma boa alternativa para abordar as doze considerações práticas listadas por Bischoff e Ratcliff (1995). Originalmente, Junqueira et al. (2012) consideraram as restrições práticas de orientação das caixas, empilhamento máximo, limitação de peso e estabilidade vertical e horizontal da carga. Por sua vez, neste trabalho foram consideradas as restrições de carregamento completo de grupos e, novamente, estabilidade vertical da carga para os problemas de múltiplos contêineres idênticos. Sendo assim, diferentemente de métodos específicos de resolução, essa abordagem mostra ser facilmente adaptável, de modo a considerar um grande número de exigências práticas comumente encontradas em problemas de carregamento de contêineres. Além disso, embora a abordagem fornecida tenha considerado apenas o carregamento de múltiplos contêineres idênticos, a modelagem proposta pode ser estendida de modo a tratar os mais variados casos descritos pela tipologia de Wäscher et al. (2007), como, por exemplo, problemas com múltiplos contêineres heterogêneos.

Futuramente, este trabalho pode ser utilizado como motivação para pesquisas que abordem as demais variantes da restrição de carregamento completo de grupo de itens citadas por Eley (2003), que tratem situações mais realísticas, abordando outras restrições práticas apontadas por Bischoff e Ratcliff (1995), e



que considerem contêineres de diferentes dimensões. Além disso, sugere-se o emprego de técnicas que visam a minimizar, por meio de conjuntos discretizados, a quantidade de pontos candidatos a vértices que as caixas podem assumir dentro de um determinado contêiner. Para isso, de modo alternativo aos padrões normais, pode-se testar uma adaptação dos números úteis utilizados em problemas de corte por Carnieri et al. (1994). A metodologia apresentada por esses autores, em termo de valores gerados, é similar aos padrões normais, porém difere no processo de obtenção dos pontos, podendo, assim, impactar no desempenho de geração dos modelos.

## REFERÊNCIAS

- ALTARAZI, S. A new prioritizing-stacking heuristic algorithm for the inner-city truck loading problem. *International Journal of Business and Management*, Toronto, v. 8, n. 3, p. 1-7, 2013.
- ARAUJO, O., C. B.; ARMETANO, V. A. A multi-start random constructive heuristic for the container loading problem. *Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro, v. 27, n. 2, p. 311-331, 2007.
- BEASLEY, J. E. An exact two-dimensional non-guillotine cutting tree search procedure. *Operations Research*, v. 33, n. 1, p. 49-64, 1985.
- BISCHOFF, E. E.; RATCLIFF, M. S. W. Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, London, v. 23, n. 4, p. 377-390, 1995.
- BORTFELDT, A.; WÄSCHER, G. Constraints in container loading: a state-of-the-art review. *European Journal of Operational Research*, London, v. 229, n. 1, p. 1-20, 2013.
- BORTFELDT, A.; GEHRING, H.; MACK, D. A parallel tabu search algorithm for solving the container loading problem. *Parallel Computing*, v. 29, n. 5, p. 641-662, 2003.
- CARNIERI, C.; MENDOZA, G. A.; GAVINHO, L. G. Solution procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal of Operations Research*, London, v. 73, p. 495-501, 1994.
- CECILIO, F. O.; MORABITO, R. Refinamentos na heurística de George e Robinson para o problema de carregamento de contêineres. *Revista Transportes*, Rio de Janeiro, v. 11, n. 2, p. 32-45, 2004.
- CHEN, C. S.; LEE, S. M.; SHEN, Q. S. An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, London, v. 80, n. 1, p. 68-76, 1995.
- CHRISTOPHIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30-44, 1977.
- ELEY, M. Solving container loading problems by block arrangement. *European Journal of Operational Research*, London, v. 141, n. 2, p. 393-409, 2002.
- ELEY, M. A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. *OR Spectrum*, London, v. 25, n. 1, p. 45-60, 2003.

- FEKETE, S. P.; SCHEPERS, J.; VEEN, J. C. van der. An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing. **Operations Research**, v. 55, n. 3, p. 569-587, 2007.
- GEHRING, H.; BORTFELDT, A. A genetic algorithm for solving the container loading problem. **International Transactions in Operations Research**, New Jersey, v. 4, n. 5-6, p. 401-418, 1997.
- HERZ, J. C. Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. **IBM Journal of Research and Development**, Nova York, v. 16, n. 5, p. 462-469, 1972.
- HIFI, M. Exact algorithms for unconstrained three-dimensional cutting problems: a comparative study. **Computers & Operations Research**, v. 31, p. 657-674, 2004.
- HIFI, M.; KACEM, I.; NEGRE, S.; WU, L. A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, London, v. 33, p. 993-1000, 2010.
- JUNQUEIRA, L.; MORABITO, R.; YAMASHITA, D. S. Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. **Computer & Operations Research**, v. 39, n. 1, p. 74-85, 2012.
- MARTELLO, S.; PISINGER, D.; VIGO, D. The three-dimensional bin packing problem. **Operations Research**, v. 48, n. 2, p. 256-267, 2000.
- MYZAWA, F. K.; WAKABAYASHI, Y. An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis. **Algorithmica**, New York, v. 18, p. 122-144, 1997.
- MOHANTY, B. B.; MATHUR, K.; IVANCIC, N. J. Value considerations in three-dimensional packing: a heuristic procedure using the fractional knapsack problem. **European Journal of Operational Research**, London, v. 74, n. 1, p. 143-151, 1994.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. An AND/OR-graph approach to the container loading problem. **International Transactions in Operational Research**, New Jersey, v. 1, n. 1, p. 59-73, 1994.
- OLIVEIRA, L. K.; MORABITO, R. Métodos exatos baseados em relaxações Lagrangeana e *Surrogate* para o problema de carregamento de paletes do produtor. **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 2, p. 403-432, 2006.
- PISINGER, D. Heuristics for the container loading problem. **European Journal of Operations Research**, London, v. 141, n. 2, p. 382-392, 2002.
- REN, J.; TIAN, Y.; SAWARAGI, T. A tree search method for the container loading problem with shipment priority. **European Journal of Operational Research**, London, v. 214, n. 3, p. 526-535, 2011.
- TSAI, R.D.; MALSTROM, E. L.; KUO, W. Three dimensional palletization of mixed box sizes. **IIE Transactions**, v. 25, n. 4, p. 64-75, 1993.
- WÄSCHER, G., HAUBNER, H., SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. **European Journal of Operational Research**, London, v. 183, n. 3, p. 1109-1130, 2007.
- YAP, C. N. et al. Ant colony optimization for container loading problem. **Journal of Mathematics and Statistics**, Delaware, v. 8, n. 4, p. 169-175, 2012.